Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2011

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Restitution organisée de connaissances

1. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 0$, donc $u'(x) = a \times \left(-\dfrac{b}{a}\right) + b \iff 0 = -b + b$.

   Donc u est une solution de (E).
2. f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, $f - u$ l'est aussi et $(f - u)(x) = f(x) - u(x)$, d'où $(f - u)'(x) = f'(x) - u'(x) = f'(x)$.

   Donc f est solution de (E) si et seulement si :
   $f'(x) = af(x)+b \iff f'(x)-u'(x) = af(x)-au(x)+au(x)+b \iff (f-u)'(x) = a(f(x) - u(x)) + a \times \left(-\dfrac{b}{a}\right) + b \iff (f - u)'(x) = a(f(x) - u(x)) - b + b \iff (f - u)'(x) = a(f(x) - u(x))$, c'est-à-dire que $f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
3. D'après le résultat initial donné on a donc $f(x) - u(x) = K\text{e}^{ax},\ K \in \mathbb{R}$, donc :
   $f(x) = K\text{e}^{ax} + u(x) = K\text{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$.

Partie B

1. L'équation différentielle peut s'écrire : $v'(t) = 3 - \dfrac{1}{10}v(t)$.

   On reconnaît une équation différentielle résolue dans la partie A avec $a = -\dfrac{1}{10}$ et $b = 3$.
   On a donc :
   $v(t) = K\text{e}^{-\frac{1}{10}t} - \dfrac{3}{-\frac{1}{10}} = K\text{e}^{-\frac{1}{10}t} + 30$.
   En utilisant la condition initiale $v(0) = 0 \iff K + 30 = 0 \iff K = -30$, on obtient finalement :

$$v(t) = 30\left(1 - \text{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$$

2. **a.** On sait que la fonction v est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :
   $v'(t) = -30\left(-\dfrac{1}{10}\right)\text{e}^{-\frac{t}{10}} = 3\text{e}^{-\frac{t}{10}} > 0$,
   car on sait que $\text{e}^{-\frac{t}{10}} > 0$, quel que soit le réel t.
   La fonction v est donc croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   b. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^{-\frac{t}{10}} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} v(t) = 30$.
3. Il faut donc résoudre l'inéquation dans $[0\ ;\ +\infty[$, $v'(t) < 0,1$, soit, d'après l'équation différentielle

$3-\dfrac{1}{10}v(t) < 0,1 \iff 3-\dfrac{1}{10}\times 30\left(1-\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{10}}\right) < 0,1 \iff 3\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{10}} < 0,1 \iff$

$\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{10}} < \frac{0,1}{3} \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien)

$-\dfrac{t}{10} < \ln\left(\frac{1}{0,3}\right) \iff t > -10\ln\left(\frac{1}{0,3}\right)$.

Comme $-10\ln\left(\frac{1}{0,3}\right) \approx 34,01$, la vitesse est donc stabilisée à partir de la 35^e^ séconde.

4. On a donc $d_{35} = \displaystyle\int_0^{35} v(t)\,\mathrm{d}t$.

On a $v(t) = 30-30\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{10}}$, dont une primitive sur $[0\ ;\ +\infty[$ est :

$V(t) = 30t+300\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{10}}$.

D'où : $d_{35} = [V(t)]_0^{35} = 30\times35+300\mathrm{e}^{-\dfrac{35}{10}} - \left(30\times0+300\mathrm{e}^{-\dfrac{0}{10}}\right) = 1\,050+300\mathrm{e}^{-\dfrac{35}{10}} -$

$300 = 750+300\mathrm{e}^{-\dfrac{35}{10}} \approx 759,06 \approx 759,1$ (m).