DS 5

Exercice 3 réservé aux élèves spécialistes. Il sera traité sur une copie séparée.

Dans un territoire donné, on s'intéresse à l'évolution couplée de deux espèces : les buses (les prédateurs) et les campagnols (les proies).
Des scientifiques modélisent, pour tout entier naturel n, cette évolution par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_0 & = & 1000 \\ c_0 & = & 1500 \\ b_{n+1} & = & 0{,}3b_n + 0{,}5c_n \\ c_{n+1} & = & -0{,}5b_n + 1{,}3c_n \end{array}\right.$$

où b_n représente approximativement le nombre de buses et c_n le nombre approximatif de campagnols le 1^er^ juin de l'année $2000 + n$ (où n désigne un entier naturel).

1. On note A la matrice $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}3 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 1050 \\ 1450 \end{pmatrix}$ et calculer U_2.

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.

On donne les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On admet que P a pour inverse une matrice Q de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

a. Déterminer la valeur de a en justifiant.

b. On admet que $A = PTQ$.
Démontrer que, pour tout entier n non nul, on a

$$A^n = PT^nQ.$$

c. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier n non nul,

$$T^n = \begin{pmatrix} 0{,}8^n & 0{,}5n \times 0{,}8^{n-1} \\ 0 & 0{,}8^n \end{pmatrix}.$$

3. Lucie exécute l'algorithme ci-dessous et obtient en sortie $N = 40$.
Quelle conclusion Lucie peut-elle énoncer pour les buses et les campagnols ?

Initialisation :	N prend la valeur 0
	B prend la valeur 1 000
	C prend la valeur 1 500
Traitement :	Tant que $B > 2$ ou $C > 2$
	N prend la valeur $N + 1$
	R prend la valeur B
	B prend la valeur $0{,}3R + 0{,}5C$
	C prend la valeur $-0{,}5R + 1{,}3C$
	Fin Tant Que
Sortie :	Afficher N

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$U_n = \begin{pmatrix} 1000 \times 0{,}8^n + \dfrac{625}{2} n \times 0{,}8^n \\ 1500 \times 0{,}8^n + \dfrac{625}{2} n \times 0{,}8^n \end{pmatrix}$$

et

$$n \leqslant 10 \times 1{,}1^n.$$

a. En déduire les limites des suites (b_n) et (c_n).

b. Des mesures effectuées dans des territoires comparables montrent que la population de campagnols reste toujours supérieure à au moins 50 individus.
À la lumière de ces informations, le modèle proposé dans l'exercice vous paraît-il cohérent ?