**NOM Prénom : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .**

**Vendredi 14 novembre 2014**

**T$^{le}$ S** **3 heures**

**Mathématiques**

**DS 2**

***Le sujet comporte 4 pages et 4 exercices.***

***Les élèves de spécialité math traiteront en plus un exercice donné à part sur une copie séparée.***

**Exercice 1** *(3,5 points)*

***Chaque question est indépendante***

**1.** Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x+1}$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 1.

**2.** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x-5)^3$.

***a.*** Montrer que $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

***b.*** Montrer que l'équation $g(x) = 2$ admet une unique solution sur $[2\,;4]$.

**Exercice 2** *(5,5 points)*

Soit la suite numérique $(u_n)$ définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n$$

**1.** ***a.*** À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite $(u_n)$ approchées à $10^{-2}$ près :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 2 | | | | | | | | |

***b.*** D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite $(u_n)$.

**2.** ***a.*** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n$ non nul on a :

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n .$$

***b.*** En déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
Interpréter.

**3.** Soit $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$ .

***a.*** Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

On précisera le premier terme de la suite $(v_n)$.

***b.*** En déduire, que pour tout entier naturel $n$, $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$

**4.** Compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de $n$ telle que $u_n \leq 0{,}01$.

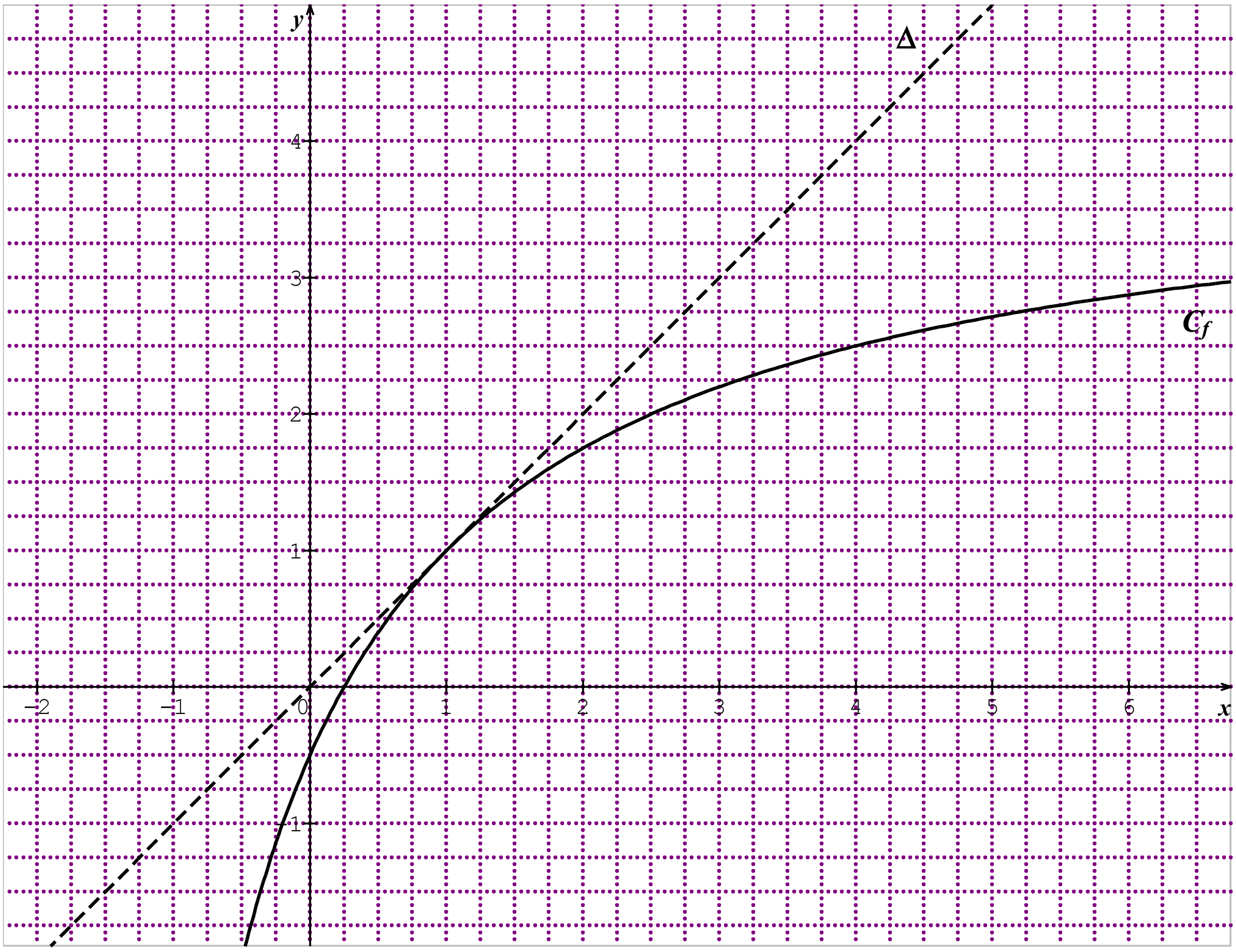
| | | |
|---|---|---|
| **Entrée :** | $n$ et $u$ sont des nombres | |
| **Initialisation :** | $n$ prend la valeur 0 | |
| | $u$ prend la valeur 2 | |
| **Traitement :** | Tant que . . . | **(1)** |
| | $n$ prend la valeur . . . | **(2)** |
| | $u$ prend la valeur . . . | **(3)** |
| | Fin Tant que | |
| **Sortie :** | Afficher $n$ | |

**Exercice 3** *(5 points)*

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel $n$, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si $f$ est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne ci-dessous une partie de la courbe représentative $C_f$ de la fonction $f$ ainsi que la droite $\Delta$ d'équation $y = x$.




**1.** ***a.*** Sur l'axe des abscisses, placer $u_0$ puis construire $u_1$, $u_2$ et $u_3$ en laissant apparents les traits de construction.

***b.*** Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de la suite $(u_n)$ ?

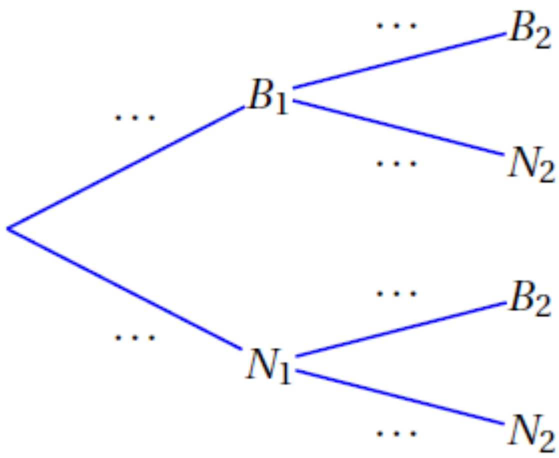
**2.** ***a.*** Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a : $u_n = \dfrac{4n+15}{4n+3}$.

***b.*** Démontrer la conjecture émise sur le sens de variation de la suite à la question **1. *b.***

**Exercice 4** *(6 points)*

On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$ contenant des boules indiscernables au toucher.
$U_1$ contient $k$ boules blanches ($k$ entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
$U_2$ contient 2 boules blanches et une boule noire.
On tire une boule au hasard dans $U_1$ et on la place dans $U_2$. On tire ensuite, au hasard, une boule dans $U_2$.
L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.
On note $B_1$ (respectivement $N_1$) l'évènement « on a tiré une boule blanche (respectivement noire) dans l'urne $U_1$ ».
On note $B_2$ (respectivement $N_2$) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne $U_2$ ».

**1.** ***a.*** Compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :




***b.*** Montrer que la probabilité de l'évènement $B_2$ est égale à $\dfrac{3k+6}{4k+12}$

**Dans la suite on considère que $k = 12$.**

**Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.**

**2.** Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.
Si, à la fin de l'épreuve, le joueur a tiré une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros. Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise.
Soit $X$ la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

***a.*** Montrer que les valeurs possibles de $X$ sont 4 et $-8$.

***b.*** Déterminer la loi de probabilité de la variable $X$.

***c.*** Calculer l'espérance mathématique de $X$.

***d.*** Le jeu est-il favorable au joueur ?

**3.** Un joueur participe $n$ fois de suite à ce jeu.
Au début de chaque épreuve, l'urne $U_1$ contient $k = 12$ boules blanches et 3 noires, et l'urne $U_2$ contient 2 boules blanches et 1 noire.
Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.

***a.*** Dans cette question on suppose que $n = 5$.
On arrondira les résultats à $10^{-3}$ près.

Déterminer la probabilité pour qu'il obtienne exactement une fois une boule blanche de l'urne $U_2$.

Déterminer la probabilité pour qu'il obtienne au moins fois une boule blanche de l'urne $U_2$.

***b.*** Déterminer le plus petit entier $n$ pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'évènement

$B_2$ soit supérieure ou égale à 0,99. Expliquer.