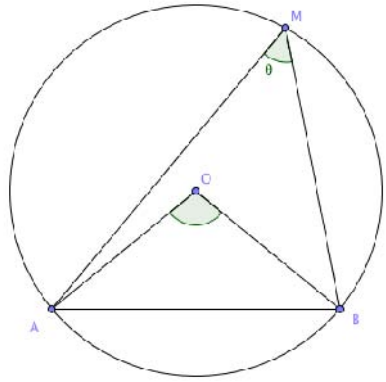
Le théorème de l'angle inscrit et de l'arc capable avec les outils du collège.

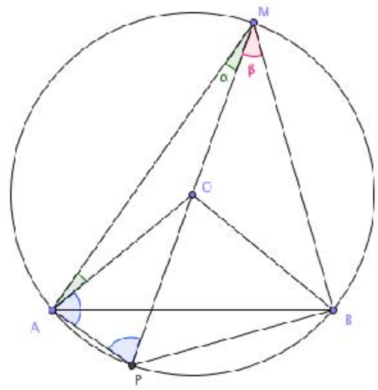
1. *Le théorème de l'angle inscrit.*



Soit un cercle de centre O et une corde AB. Si M est un point du cercle qui regarde la corde AB dans le même sens que O, alors l'angle $\widehat{AOB}$ est le double de l'angle $\widehat{AMB}$.

$\widehat{AMB} = \theta$ est l'angle inscrit,
$\widehat{AOB} = 2\theta$ est l'angle au centre associé.

2. Démonstration.



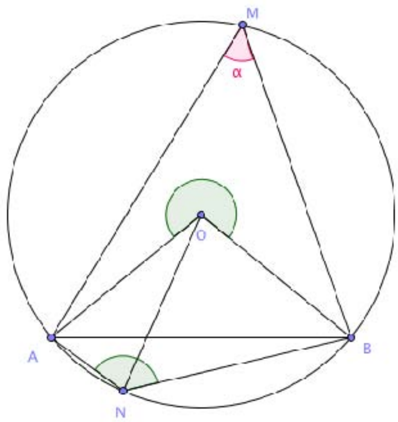
Soit P le point diamétralement opposé à M.
Remarquons les triangles isocèles de sommets O et l'angle droit $\widehat{MAP}$.

$\widehat{AOP} = \pi\text{-}2\ \widehat{OAP} = \pi - 2\times\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\alpha.$

De même $\widehat{BOP} = 2\beta.$

Ainsi $\widehat{AOB} = 2\alpha + 2\beta = 2\theta.$

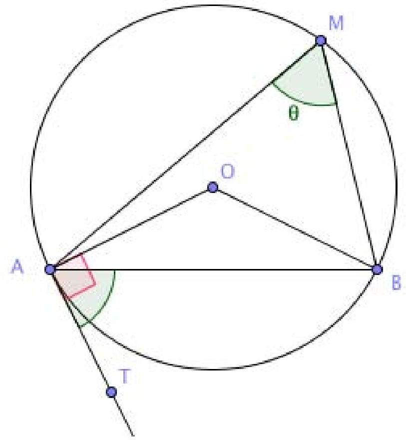
3. Cas où N et O sont de part et d'autre de la corde.



L'angle $\widehat{AOB}$ rentrant = 2 $\widehat{ANB}$.

En effet: $2\ \widehat{ONA} + \widehat{AON} = \pi$ (i)
et $2\ \widehat{ONB} + \widehat{BON} = \pi$ (ii)
En additionnant : $2(\ \widehat{ONA} + \widehat{ONB}\ ) + \widehat{AOB} = 2\pi$
d'où $\widehat{ONA} + \widehat{ONB} = \widehat{ANB} = \pi - \alpha$ d'une part,
et d'autre part l'angle rentrant $\widehat{AOB} = 2\pi\text{-}2\alpha = 2\ \widehat{ANB}$.

4. Angle de la tangente.



Soit (AT) la demi-droite tangente en A au cercle.
L'angle $\widehat{TAB} = \theta$.

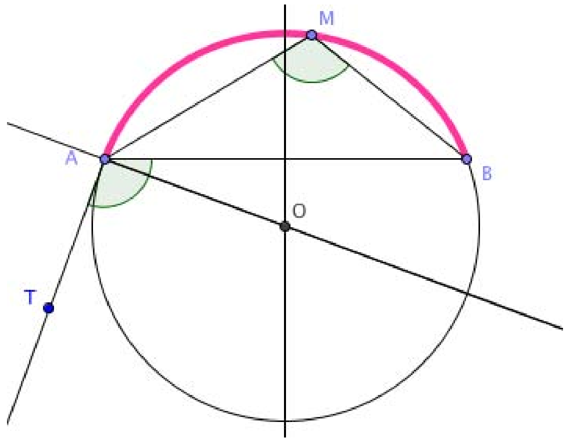
En effet: $\widehat{TAB} = \dfrac{\pi}{2} - \widehat{OAB}$ et $2\times\widehat{OAB} + 2\theta = \pi$, d'où :

$\widehat{TAB} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} + \theta = \theta.$

5. Le théorème de l'arc capable.

Soit un angle $\theta \in]0;\pi[$ et deux points A et B donnés.
Le lieu $\mathscr{L}$ des points M du plan tels que $\widehat{AMB}=\theta$, s'appelle arc capable, c'est l'ensemble des points d'où l'on voit le segment [AB] selon un angle θ.

Remarquons que $\mathscr{L}$ par rapport à (AB).



a) $\mathscr{L}$ n'est pas vide.

D'après 4., traçons (AT) tel que $\widehat{TAB}=\theta$.
La perpendiculaire en A rencontre la médiatrice de [AB] en O. Les points M de l'arc de cercle situé dans le demi-plan de frontière (AB), ne contenant pas T, vérifient d'après le théorème de l'angle inscrit $\widehat{AMB}=\theta$.

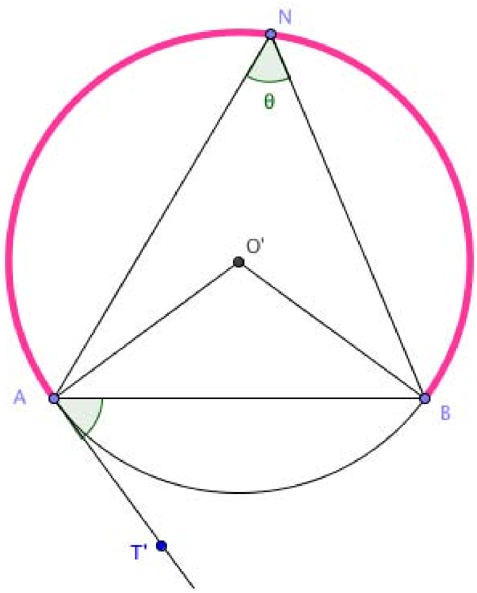
Donc le lieu cherché $\mathscr{L}$ n'est pas vide.

Remarquons le cas particulier où $\theta=\frac{\pi}{2}$, l'arc est un demi-cercle de diamètre [AB] et son symétrique, soit tout le cercle (sauf A et B).
Si $\theta<\frac{\pi}{2}$ alors O et M sont du même côté de la corde et inversement si $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$.

b) Réciproque.

Tout point N vérifiant $\widehat{ANB}=\theta$, est-il sur un tel arc ?

Soit Γ le cercle circonscrit à ABN, et O' son centre.
D'après 4. $\widehat{T'AB}=\theta$, par suite O et O' sont confondus et le point N est sur le même arc que M (et pas ailleurs).



En conclusion le lieu $\mathscr{L}$ des points M qui voient le segment [AB] selon un angle θ est la réunion des deux arcs capables, symétriques par rapport à (AB) privée des points A et B.